

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения Российской академии наук (ИТПМ СО РАН)

Беляев Василий Алексеевич

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы
(диссертации)

*«Варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения
дифференциальных уравнений в канонических и нерегулярных областях
и их приложение к задачам механики деформируемого твердого тела»*

Направление подготовки:

01.06.01 — Математика и механика

Специальность подготовки: 01.02.04 — механика деформируемого твердого
тела

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Шапеев Василий Павлович

Новосибирск 2021

Актуальность исследования¹ обусловлена необходимостью развития методов математического и численного моделирования задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ). В рамках научного исследования были выделены следующие задачи.

Первая задача связана с разработкой новых вариантов численных методов, применимых для решения краевых задач различных моделей МДТТ. При разработке этих инструментов научных исследований для их эффективности к алгоритмам предъявляются требования точности, устойчивости и скорости сходимости. При создании методов важно выяснять область их применимости, так как в современной науке идет процесс расширения области приложения математического моделирования. При этом исследователи встречаются со все более и более сложными задачами, которые предъявляют повышенные требования к свойствам численных методов и часто требуют комплексного подхода к их решению. Поэтому гибкие и универсальные численные методы, которые можно относительно легко адаптировать для решения различных задач, становятся удобными инструментами.

Вторая задача посвящена численному решению краевых задач для уравнений с частными производными (УЧП) эллиптического типа второго и четвертого порядков в канонических и нерегулярных областях, зачастую встречающихся на практике и входящих как часть в более общие математические модели. Исследование возможностей предложенных в данной работе методов как в случаях задач с уравнениями, имеющими гладкие решения, так и в случаях наличия в них различных особенностей, позволяет выяснить их преимущества и достоинства. Эффективная реализация, верификация новых вариантов численных методов, а также сравнение полученных результатов их применения с результатами других методов является значимым этапом создания инструментов для решения современных задач.

Третья задача — математическое и численное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) при изгибе композитных балок и тонких пластин, являющихся распространенными типовыми элементами конструкций в различных отраслях промышленности. Комплексный подход, связанный с построением новых математических моделей и алгоритмов их

¹Работа выполнялась в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117030610136-3, АААА-А19-119051590004-5 и 121030500137-5), при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00227 и 18-29-18029) и РНФ (грант № 18-13-00392).

численной реализации, расширяет возможности моделирования. Учет важных особенностей деформирования элементов конструкций, высокая точность и скорость решения сопутствующих задач приводит к лучшему совпадению результатов моделирования и натуральных экспериментов, а также является актуальным для инженерных расчетов и при решении задач оптимизации конструкций. При этом усложнение математических моделей, рассмотрение сложных форм элементов конструкций и различных теорий описания их НДС зачастую приводит к плохо обусловленным задачам и задачам с особенностями, для решения которых требуются новые эффективные численные методы.

Цель работы состоит в построении эффективного численного метода решения различных краевых задач МДТТ в канонических и нерегулярных областях, его верификации и практическом применении; в разработке математической модели изгиба композитных балок, учитывающей разнородность материалов растяжению-сжатию, физическую нелинейность, разрушение, обусловленное образованием и распространением трещин, и алгоритма ее численной реализации.

Степень разработанности темы исследования. В настоящее время не существует универсального способа численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в задачах МДТТ и в механике сплошных сред (МСС) в целом, поскольку многие реальные процессы и явления происходят в областях различных форм и описываются разными математическими моделями, постоянно совершенствующимися и усложняющимися. Это, с одной стороны, вызывает появление новых вариантов численных методов, таких как метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР), спектральные методы и др., а, с другой стороны, новых математических моделей, в которых стремятся учесть различные существенные особенности поведения элементов конструкций. В данной работе построены новые варианты достаточно универсального численного метода коллокации и наименьших квадратов (КНК), которые применены для расчета изгиба тонких пластин простых и сложных форм, а также разработаны новая математическая модель изгиба разнородных растяжению-сжатию композитных балок, учитывающая физическую нелинейность материалов и разрушение, и алгоритм ее численной реализации. Метод КНК был верифицирован на решении ряда тестовых задач, которые имеют место и в других различных разделах МСС, и продемонстрированы его

возможности и преимущества по сравнению с другими численными методами.

Объектами исследования являются метод КНК, эллиптические уравнения второго и четвертого порядков, НДС при изгибе композитных балок и тонких пластин.

Предметами исследования являются применение h -, p - и hp -подходов к построению вариантов метода КНК в канонических областях решения задач и их обобщение на случай нерегулярных областей; численное решение краевых задач с особенностями; учет в математической модели особенностей деформирования композитных балок в виде физической нелинейности, разносопротивляемости материалов растяжению-сжатию и разрушения.

Задачи, решенные в ходе достижения поставленной цели.

1. Предложены, реализованы и верифицированы новые h -, p - и hp -варианты метода КНК (далее h -, p - и hp -КНК соответственно) в комбинации с современными алгоритмами ускорения итерационного процесса решения краевых задач для УЧП различных порядков, в том числе плохо обусловленных и с особенностями, в канонических и нерегулярных областях.
2. Разработана новая математическая модель изгиба разносопротивляющихся растяжению-сжатию композитных балок с учетом физической нелинейности и разрушения, обусловленного появлением и распространением трещин, а также алгоритм ее численной реализации. Проведены валидация математической модели в частных случаях на полученных в ФГУП “ВИ-АМ” экспериментальных данных изгиба углепластиков, “чистого” и армированного льда, а также экспериментальных данных железобетона, взятых из литературы, и сравнение результатов численных расчетов с результатами трехмерного моделирования.
3. Проведено численное моделирование изгиба тонких изотропных и ортотропных пластин, в том числе лежащих на упругом основании, простых и сложных форм в рамках классической теории Кирхгофа-Лява и теории сдвиговых деформаций первого порядка (англ. FSDT, first-order shear deformation theory). Проведен сравнительный анализ полученных результатов в зависимости от используемого варианта метода КНК при решении хорошо и плохо обусловленных задач и задач с особенностями.

4. Разработан комплекс программ для проведения численного моделирования рассмотренных задач. Зарегистрированы две программы для ЭВМ.

Научная новизна изложенных в работе результатов заключается в следующем:

1. Предложено и реализовано несколько различных новых h -, p - и hp -КНК, сочетающих в себе разные способы построения расчетных сеток для численного решения краевых задач в канонических и нерегулярных областях, в том числе в многосвязных и с дискретно заданной границей области, и при наличии в области линий разрыва достаточно произвольных форм в комбинации с современными способами ускорения сходимости итераций. При этом использовались квазирегулярные сетки и сетки, построенные на основе оригинальной идеи присоединения вытянутых и/или малых “несамостоятельных” околограничных нерегулярных ячеек (n -ячеек) к соседним “самостоятельным” и использования их законтурных частей. Проведены верификации предложенных вариантов метода КНК с демонстрацией их достоинств на решении большого количества разнообразных задач, в том числе с особенностями, и сравнение с результатами других авторов.
2. Разработана новая математическая модель изгиба композитных балок, учитывающая физическую нелинейность, разносопротивляемость материалов растяжению-сжатию и разрушение, обусловленное образованием и распространением поперечных трещин, и алгоритм ее численной реализации. Он включает в себя моделирование квазистатического процесса нагружения с многократным решением системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) и краевой задачи для дифференциального уравнения hp -вариантом метода КНК с возможностью их распараллеливания и использования различных законов деформирования, а также процедурой уточнения характеристик НДС при образовании разрушения. Проведены валидация математической модели в частных случаях на примере углепластиков, “чистого” и армированного льда и железобетона, а также сравнение результатов с трехмерным моделированием.
3. Разработанные новые варианты метода КНК, в том числе с интегральными коллокациями, применялись к расчету изгиба изотропных и ортотропных пластин простых и сложных форм в рамках теории Кирхгофа-Лява

и FSDT. Проведен сравнительный анализ полученных результатов в зависимости от разных подходов построения сеток в методе КНК при решении хорошо и плохо обусловленных задач и задач с особенностями.

4. Создан новый комплекс программ для ЭВМ, позволяющий численно решать рассмотренные в работе задачи.

Методология и методы исследования. В основу работы был заложен комплексный подход при решении поставленных задач, объединяющий в себе методы математического и численного моделирования: использование и построение математических моделей, основанных на фундаментальных законах, гипотезах и уравнениях механики; применение верифицированного метода КНК, алгоритмов ускорения итерационного процесса и численных методов алгебры. Результаты численного моделирования сравнивались с данными физических экспериментов для выяснения адекватности применяемых моделей и способа моделирования. Результаты механических испытаний применялись для аппроксимации диаграмм деформирования.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых h -, p - и hp -КНК для решения краевых задач в канонических и нерегулярных областях в комбинации с различными способами ускорения итерационного процесса; в разработке новой математической модели изгиба разносопротивляющихся композитных балок с учетом физической нелинейности и разрушения, обусловленного образованием и распространением трещин, и алгоритма ее численной реализации.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных математической модели, численных алгоритмов и комплекса программ для 1) быстрого расчета на персональном компьютере изгиба типовых элементов конструкций в виде композитных балок и тонких пластин в разных отраслях промышленности, в частности, в строительной индустрии и авиации; 2) решения различных прикладных задач математической физики.

Степень достоверности и апробации результатов, полученных в работе, подтверждается

- результатами численных экспериментов по определению порядка сходимости погрешностей приближенных решений и их значений при измельчении

шагов расчетных сеток и увеличении степеней аппроксимирующих полиномов в методе КНК;

- сопоставления результатов, полученных методом КНК, с результатами других исследователей при решении известных модельных задач;
- использованием гипотез и уравнений МДТТ, экспериментальных данных, известных методик построения диаграмм деформирования при разработке новой математической модели;
- сравнением расчетов с экспериментальными данными, опубликованными в литературе и полученными в ФГУП «ВИАМ».

Основные результаты докладывались на следующих научных конференциях: Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 2015–2017); Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2016, 2019; Кемерово, 2018); Всероссийская конференция с международным участием «Высокоэнергетические процессы в механике сплошной среды» (Новосибирск, 2017, 2019, 2020); Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», посвященная 60-летию института гидродинамики им М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017); Всероссийская конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск — Шерегеш, 2018–2021); Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2018); Международная конференция по вычислительной математике и математической геофизике, посвященная 90-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева (Новосибирск, 2018); VIII Всероссийская молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики — 2018» (Томск, 2018); Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященная 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, 2019); Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2019); Одиннадцатая международная молодежная научная школа — конференция «Теория и численные методы

решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2019); XVI Всероссийский семинар с международным участием «Динамика Многофазных Сред» (Новосибирск, 2019); Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2020», посвященная 95-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука (Новосибирск, 2020); V Всероссийская научно-техническая конференция «Климат–2020: современные подходы к оценке воздействия внешних факторов на материалы и сложные технические системы» (Москва, 2020); 27-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященная 100-летию со дня рождения Н.Н. Яненко (Красноярск, 2021).

Положения, выносимые на защиту

1. *Разработка новых h -, p - и hp -КНК для решения краевых задач в канонических и нерегулярных областях в комбинации с современными вычислительными алгоритмами ускорения сходимости численных решений УЧП. Верификация метода на решении ряда тестовых задач с известными аналитическими и неизвестными решениями, в том числе с различными особенностями. Сравнение полученных результатов с результатами разных авторов, использовавших другие численные методы, с демонстрацией достоинств и преимуществ метода КНК.*
2. *Разработка новой математической модели изгиба композитных балок, учитывающей физическую нелинейность, разносопротивляемость материалов растяжению-сжатию, армирование, разрушение, обусловленное образованием и распространением трещин при увеличении нагрузки, и алгоритм ее численной реализации. Результаты расчетов изгиба композитных балок на примере углепластиков, “чистого” и армированного льда и железобетона. Сравнение результатов с натурными экспериментами и трехмерным моделированием. Исследование влияния на результат параметров математической модели при численных расчетах.*
3. *Применение новых вариантов метода КНК к численному моделированию изгиба тонких пластин простых и сложных форм в рамках теории Кирхгофа-Лява и FSDT. Проведение сравнительного анализа полученных результатов в зависимости от используемого варианта при решении хорошо и плохо обусловленных задач и задач с особенностями для уравнений*

соответствующих моделей.

4. *Комплекс программ для ЭВМ, основанный на новых вариантах метода КНК, позволяющий численно решать различные краевые задачи для УЧП и проводить численное моделирование изгиба композитных балок и упругих изотропных и ортотропных пластин простых и сложных форм на персональном компьютере.*

Публикации. По теме диссертации опубликовано более чем **40** работ, в том числе **8** статей в журналах, рекомендованных ВАК, 2 из которых индексируются в Web of Science и Scopus, **10** публикаций в трудах международных и всероссийских конференций, индексируемых в Web of Science и/или Scopus, **2** свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснованы актуальность и важность решения задач по выбранной теме исследований. Обсуждаются подходы математического и численного моделирования рассмотренных задач. Дан обзор литературы по численным методам, которые используются на практике при решении поставленных задач. Отдельное внимание уделено методу КНК, перечислены основные направления его развития. Приведена структура работы и выносимые на защиту положения.

Глава 1 посвящена новым, повышенной точности вариантам метода КНК, являющихся развитием предыдущих исследований А.Г. Слепцова, В.П. Шапеева, Л.Г. Семина, В.И. Исаева, С.В. Идимешева, С.К. Голушко и др.^{2,3,4}

Описание метода КНК и формулировки его алгоритмов даны в разделе 1.1. В п. 1.1.1 приведено описание h-, p- и hp-КНК. В h-КНК уточнение решения задач происходит за счет измельчения шагов сетки при фиксированной степени K аппроксимирующих полиномов, в p-КНК — наоборот. Отдельный интерес представляет собой рассмотрение возможностей p-КНК₁, в котором

²Sleptsov, A.G. Grid-projection solution of an elliptic problem for an irregular grid/ A.G. Sleptsov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling — 1993. — Vol. 8, No. 6. — С. 519–543.

³Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 10. — С. 1758–1770.

⁴Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 6. — С. 31–43.

используется всего одна ячейка, совпадающая со всей расчетной областью Ω или включающая всю Ω в случае ее нерегулярности. Если разбиение области фиксировано и ячеек сетки больше, чем одна, то такой вариант метода назовем р-КНК $_h$. В hp-КНК имеется возможность измельчать шаг сетки и/или увеличивать K . Приближенное решение $v_{h,j}^k$ в каждой j -ой ячейке для k -ой компоненты решения в локальных координатах (y_1, y_2) искалось в виде

$$v_{h,j}^k(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K c_{i_1 i_2, j}^k \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2), \quad (1)$$

$$\phi_{i_1}(y_1) = \cos(i_1 \arccos(y_1)), \quad \phi_{i_2}(y_2) = \cos(i_2 \arccos(y_2)).$$

$$v_{h,j}^k(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^{K-i_1} c_{i_1 i_2, j}^k y_1^{i_1} y_2^{i_2}. \quad (2)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $c_{i_1 i_2, j}^k$ в каждой ячейке выписывалась локальная переопределенная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из *уравнений коллокации* — требования выполнения исходных дифференциальных уравнений, *условий согласования* — требования непрерывности функции и ее производных на общих сторонах между соседними ячейками и *краевых условий* — требования выполнения граничных условий, если ячейка являлась граничной (рис. 1). Глобальная СЛАУ, являющаяся совокупностью локальных СЛАУ, решалась с помощью итераций по подобластям. В п. 1.1.2 приведен алгоритм построения консервативного варианта метода КНК на примере решения УЧП, которые могут быть записаны в дивергентном виде.

В разделе 1.2 приведено описание реализации новых вариантов метода КНК в нерегулярных областях. Помимо аналитического задания границы области $\delta\Omega$ в п. 1.2.1 отдельное внимание уделено ее дискретному заданию (рис. 1). Отметим, что на практике зачастую встречаются задачи, граница которых полностью или частично задана дискретным набором точек, поскольку во многих случаях для достаточно произвольной формы $\delta\Omega$ ее аналитическое задание затруднительно или неизвестно. В этом случае $\delta\Omega$ восполняется по входным дискретным данным векторной сплайн-функцией, в качестве компонент которой взяты два кубических сплайна, являющиеся функциями параметра t , монотонно меняющегося при движении точки вдоль замкнутой границы. Во многих случаях в качестве параметра t удобно взять номер точки.

В п. 1.2.2 описан способ построения квазирегулярных сеток в четырехугольных областях, основанный на разбиении противоположных сторон на одинаковое количество отрезков, концы которых соединяются при однозначной последовательной нумерации точек, расставленных на противоположных сторонах Ω .

Приведенная в п. 1.2.3 методика построения сеток заключается в включении исходной нерегулярной Ω в фиктивный прямоугольник, который затем покрывается регулярной сеткой $N \times N$ с прямоугольными ячейками. В hp-КНК около $\delta\Omega$ образуется “одинарный слой” n -ячеек, отсеченных от прямоугольных (материнских) ячеек исходной сетки. Предложено присоединять вытянутые и/или малые несамостоятельные n -ячейки, центр материнских ячеек которых оказался вне Ω , к соседним самостоятельным ячейкам (рис. 1), а затем в объединенных ячейках строить единое приближенное решение. При этом для записи уравнений коллокации и условий согласования использовались законтурные части самостоятельных n -ячеек. Аналогичные идеи построения решения в канонических областях с некоторыми модификациями эффективно применены при решении задач в Ω с внутренней криволинейной границей раздела подобластей. В p-КНК₁ рассматривались разные способы расположения точек коллокации с использованием законтурной части и в случае ее отсутствия.

Раздел 1.3 посвящен комбинированному применению различных способов ускорения итерационного процесса решения глобальной СЛАУ и улучшения свойств сходимости метода КНК. В п. 1.3.1–1.3.5 уделяется внимание

- предобуславливанию СЛАУ;

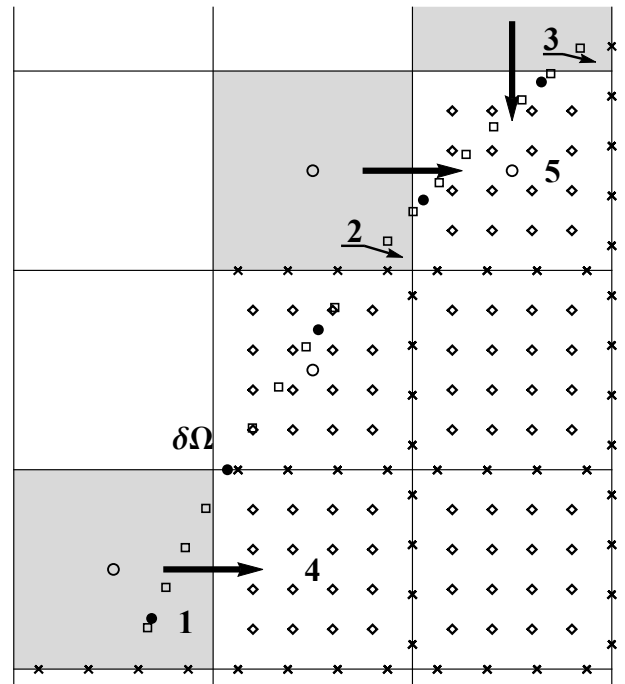


Рис. 1 — точки “•”, дискретно задающие границу области; “o” — точки коллокации, “x” — точки согласования, “□” — точки записи краевых условий, “o” — центры n -ячеек. Темным цветом выделены материнские ячейки, содержащие внутри себя n -ячейки 1–3, которые присоединяются к ячейкам 4, 5.

- свойствам локальной системы координат в методе КНК;
- распараллеливанию с помощью открытого стандарта Open MP со способом обхода области, основанным на красно-черном упорядочивании;
- ускорению сходимости итераций, основанному на подпространствах Крылова;
- операции продолжения вдоль восходящей ветви V-цикла на многосеточном комплексе в методе Федоренко в случае применения мономов и полиномов Чебышева произвольной степени.

В п. 1.3.6 на примере решения уравнения Пуассона показана эффективность комбинированного применения метода КНК с различными способами ускорения итерационного процесса, что позволило уменьшить количество итераций более чем в 200 раз и сократить время расчетов практически в 2000 раз по сравнению со случаем их отсутствия.

Глава 2 посвящена численному решению краевых задач для эллиптических уравнений второго (раздел 2.1) и четвертого порядков (раздел 2.2). Отметим, что такие уравнения могут входить как часть в более общие постановки задач МДТТ и других разделов МСС, а также иметь самостоятельное прикладное значение. Например, система из двух уравнений Пуассона $\Delta_{x_1x_2}u = f$, где $\Delta_{x_1x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, u и f — неизвестная и известная функции соответственно, описывает изгиб шарнирно-закрепленной пластины полигональной формы⁵. Система УЧП эллиптического типа второго порядка возникает при моделировании изгиба ортотропной пластины в рамках FSDT⁶. К рассмотренному в разделе 2.2 решению бигармонического уравнения

$$\Delta_{x_1x_2}^2 u = f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (3)$$

сводится анализ поведения решений различных задач МСС, например, линейной теории упругости, теории тонких пластин, гидродинамики при малых числах Рейнольдса. Уравнения бигармонического типа могут также быть использованы для описания изгиба ортотропной пластины и пластины, лежащей на упругом основании.

⁵Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Физматгиз. — 625 с.

⁶Reddy, J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd edn / J.N. Reddy. — CRC Press. — P. 858.

В разделе 2.1 в п. 2.1.1 рассматриваются примеры высокоточного решения методом КНК уравнения Пуассона с особенностями в виде

- больших градиентов как внутри Ω , так и в окрестности $\delta\Omega$;
- разрыва производных в угловых точках квадратной Ω ;
- особенностью в комплексной плоскости;
- осциллирующего решения с различными частотами при наличии точки разрыва типа полюс для производных любого порядка;
- сильного разрыва решения на границе раздела различных форм.

В п. 2.1.2 приведены результаты численных решений стационарного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, полученных консервативным hp-КНК. В п. 2.1.3 даны результаты численного решения методом КНК уравнения типа диффузии-конвекции с малым параметром при старших производных.

Отметим, что особенности подобного характера могут возникать в самых различных ситуациях. Так, например, большие градиенты решений могут появляться при моделировании поведения анизотропных конструкций. Условия с разрывами параметров задачи (коэффициента при старших производных, решения и его производных) используются при моделировании теплопереноса в конструкциях из разнородных материалов и в многофазных потоках, для описания процессов затвердевания и в других прикладных задачах. Разрывы производных решения могут возникнуть в точках приложений сосредоточенных нагрузок к балкам.

В п. 2.2.1 раздела 2.2 приведены результаты численного решения бигармонического уравнения (3) в нерегулярных областях, в том числе многосвязных, краевые задачи для которого зачастую являются плохо обусловленными.

В табл. 1 приведены результаты численных экспериментов при решении уравнения Пуассона с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{-\beta(x_1^2+x_2^2)}$ с большими градиентами внутри области, полученные hp-КНК и МКР⁷, где R — порядок сходимости абсолютной погрешности приближенного решения в бесконечной норме $\|E_a\|_\infty$, для краткости K также обозначает порядок схемы в МКР. При решении эллиптического уравнения с разрывным коэффициентом и решения на внутренней криволинейной линии разрыва с малым параметром при стар-

⁷Drozdov, G.M. CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation / G.M. Drozdov, V.P. Shapeev // Lecture Notes in Computer Science. — 2014. — Vol. 8660. — P. 99–110.

шей производной в работе⁸ на сетке 320×320 была достигнута точность порядка 10^{-5} – 10^{-6} МКР второго порядка аппроксимации. На сетке 80×80 hp-КНК при $K = 4$ достигается точность $1.27e-7$. При решении уравнения типа диффузии-конвекции с малым параметром со значениями вплоть до 10^{-4} проводилось сравнение с адаптивным вариантом метода КНК и МКР на решении подобных задач. Были рассмотрены и другие примеры при сравнении результатов численных экспериментов с МКР и адаптивным разрывным методом Галеркина, где также наблюдались достоинства и преимущества метода КНК.

Таблица 1 — Результаты численных экспериментов при $\beta = 1000$

K	$N \times N$	МКР		метод КНК	
		$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R
10	10×10	2.936	—	$1.51 \cdot 10^{-2}$	—
	20×20	3.086e-1	3.25	8.76e-5	7.42
	40×40	1.559e-4	10.95	5.9e-8	10.52
	80×80	8.78e-8	10.79	7.75e-11	9.57
18	5×5	—	—	1.03	—
	10×10	154283	—	2.91e-5	15.11
	20×20	307.82	8.97	1.08e-9	14.71
	40×40	1.19e-3	17.98	4.33e-13	11.28

Результаты сравнения решения уравнения (3) с краевыми условиями, в которые входили производные вплоть до третьего порядка, в нерегулярной области с тестовым решением из работы W. Shao и др.⁹ приведены в табл. 2. При решении задачи Дирихле для (3) в звездной области, сформулированной в работе G. Chen и др.¹⁰, авторам удалось достигнуть точность $1.83e-5$ на сетке 512×512 МКР. Shao и др. с использованием полиномов Чебышева при $K = 13$ достигли точность $3.09e-12$. При $K = 13$ с использованием полиномов Чебышева (1) p-КНК₁ удалось достигнуть точность 10^{-14} во всех случаях при трех различных расположениях точек коллокации и записи краевых условий. При решении задачи Дирихле в многосвязной области авторам работы¹¹ при оди-

⁸Tzou, C. Simple second-order finite differences for elliptic PDEs with discontinuous coefficients and interfaces / C. Tzou, S.N. Stechmann // Communications in Applied Mathematics and Computational Science. — 2019. — Vol. 14, No. 2. — P. 121–147.

⁹Shao, W. Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain / W. Shao, X. Wu, S. Chen // Engineering Analysis with Boundary Elements Volume. — 2012. — Vol. 36, No. 12. — P. 1787–1798.

¹⁰Chen, G. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow / G. Chen, Z. Li, P. Lin // Advances in Computational Mathematics. — 2007. — Vol. 29, No. 2. — P. 113–133.

¹¹Mai-Duy, N. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains/ N. Mai-Duy, N. See, T. Tran-Cong // Applied Mathematical Modelling. — 2009. — Vol. 33, No. 1. — P. 284–299.

наковых K в случае применения полиномов Чебышева (1) удалось достигнуть лучшую точность по сравнению p-КНК₁ и с Shao и др. Сравнение последних двух при одинаковых K показывает, что p-КНК₁ точнее. При этом Mai-Duy и др. разделяли область на три подобласти и наилучшую точность смогли достигнуть $8.7e-12$ при $K = 13$. Shao и др. достигли $2.45e-13$ при $K = 20$, а p-КНК₁ позволяет достичь $5.13e-15$ при $K = 20$. Были рассмотрены и другие примеры, в которых метод КНК оказался точнее. Также был рассмотрен случай с особенностью в виде обращения в бесконечность вторых производных в угловой точке Ω^{12} , где авторам удалось именно за счет адаптации к особенности в МКЭ повысить порядок сходимости и точность, которая оказалась выше, чем в hp-КНК. При отсутствии адаптации в МКЭ получались результаты приблизительно одинаковые с h-КНК при $K = 4$ с представлением решения в виде (2).

Таблица 2 — Результаты численных экспериментов при решении (3), $\|E_r\|_2$ — относительная погрешность в L_2 норме

K	4	6	8	10	12
Shao и др.					
$\ E_r\ _2$	1.75e-2	1.47e-4	2.61e-6	1.29e-7	7.10e-10
p-КНК ₁ , решение в виде (1)					
$\ E_r\ _2$	2.80e-2	1.24e-4	3.09e-6	4.74e-8	2.99e-10

Таким образом, проведенное исследование показало универсальность и гибкость метода КНК:

- 1) во многих случаях метод КНК не уступает по точности другим методам и зачастую превосходит их;
- 2) реализация метода КНК проста при произвольной степени K во всех предложенных вариантах метода;
- 3) метод КНК позволяет решать большой класс задач в исходных постановках, в том числе с особенностями, с небольшими модификациями при необходимости и при их относительно простотой реализации;
- 4) метод КНК позволяет легко учитывать краевые условия, в которые входят производные высоких порядков.

Реализация вышеперечисленных модификаций других численных методов может вызывать существенные трудности.

¹²Guo, H. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems/ H. Guo, Z. Zhang, Q. Zou // Journal of Scientific Computing. — 2018. — Vol. 74. — P. 1397–1422.

В разделе 2.3 показаны сравнения результатов решения хорошо и плохо обусловленных задач при использовании различных подходов учета нерегулярности областей в методе КНК. Установлено, что при решении уравнения Пуассона достаточно использовать квазирегулярные сетки в четырехугольных областях даже в случае наличия вытянутых и/или малых ячеек, а при решении бигармонического уравнения рекомендуется строить сетки в соответствии с методикой, основанной на присоединении малых n -ячеек. В последнем случае показано, что числа обусловленности матриц локальных СЛАУ меньше по сравнению с их обусловленностью в случае использования квазирегулярных сеток с четырехугольными ячейками. При этом способ построения сетки, описанный в п. 1.2.3, является достаточно универсальным и успешно применялся для различных нерегулярных областей, что делает его еще более предпочтительным в использовании.

Глава 3 посвящена расчету изгиба композитных балок. В разделе 3.1 сформулирована новая математическая модель изгиба разносопротивляющихся растяжению-сжатию композитных балок с учетом физической нелинейности, возникновения и развития разрушения вследствие образования и распространения трещин при наличии армирования. В общем случае балка может состоять из произвольного количества слоев, которые могут быть изготовлены из различных материалов и в них может присутствовать армирование. Для описания равновесного состояния и распределений деформаций по толщине балки $\varepsilon(x, z) = e(x) + z\kappa(x)$, где e и κ — деформация и кривизна срединной поверхности соответственно, использовались уравнения классической теории изгиба балок (Эйлера–Бернулли). Для аппроксимации диаграмм деформирования, описывающих нелинейную связь между напряжениями σ и деформациями ε , применялся метод наименьших квадратов, использовалась кусочно-линейная и кусочно-полиномиальная аппроксимации. Эти положения включены в подход решения поставленной задачи и описаны в п. 3.1.1.

Рассмотрены разные случаи положения разрушенных частей относительно армирующего слоя, зон сжатия и растяжения (п. 3.1.2). Так, на рис. 2 представлено поперечное сечение балки с наличием продольного слоя с арматурой для случая, когда разрушенная часть сечения нахо-

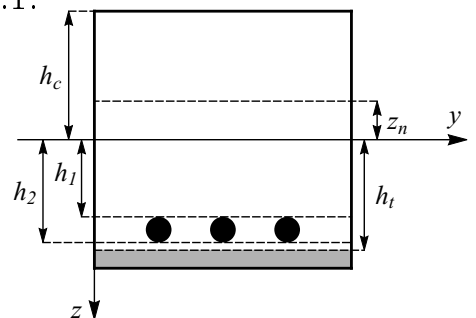


Рис. 2 — Поперечно сечение.

дится ниже этого слоя в области растяжения. Здесь темным цветом выделено сечение разрушенной части, а пунктирными линиями разграничены области, в которых действуют единые законы деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. В этом случае $h_t \geq h_2$, продольное усилие и изгибающий момент

$$N = b \int_{h_c}^{z_n(x)} g_c^- dz + b \int_{z_n(x)}^{h_1} g_c^+ dz + \int_{h_1}^{h_2} (b_c g_c^+ + b_r g_r) dz + b \int_{h_2}^{h_t} g_c^+ dz, \quad (4)$$

$$M = b \int_{h_c}^{z_n(x)} g_c^- z dz + b \int_{z_n(x)}^{h_1} g_c^+ z dz + \int_{h_1}^{h_2} (b_c g_c^+ + b_r g_r) z dz + b \int_{h_2}^{h_t} g_c^+ z dz, \quad (5)$$

где $z_n(x)$ — положение нейтральной поверхности, $b_r = b \frac{S_r}{S}$, S — площадь части поперечного сечения балки, в котором расположена арматура, S_r — площадь сечения арматуры, $b_c = b - b_r$, g_c^\pm — функция, аппроксимирующая диаграмму связующего, g_r — арматуры, где “+” отвечает соотношения для области с положительными ε , а “-” — с отрицательными.

Для определения поврежденных участков рассматривались деформации на отрезке $\varepsilon^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon^+$, где ε^\pm — предельно допустимые деформации при растяжении (+) и сжатии (−), различные для каждого материала балки. Из решения СНАУ (4), (5) определяются e и κ с учетом только неразрушенных участков во всех расчетных поперечных сечениях на каждом шаге нагрузки P , которая увеличивается на ΔP . Часть поперечного сечения, для которой $\varepsilon(x, z) > \varepsilon^+$ или $\varepsilon(x, z) < \varepsilon^-$, в расчетах не учитывалась. Для корректного определения характеристик НДС балки $e(x)$, $\kappa(x)$, h_c и h_t пересчитывались итерационно при том же значении нагрузки до тех пор, пока модуль разницы между новыми и предыдущими значениями h_c и h_t не становился меньше $\delta \cdot 2h$, где δ — малая величина. Потеря несущей способности балки происходит в одном из случаев: 1) какое-либо поперечное сечение полностью разрушено, т.е. $h_c \geq h_t$; 2) при решении СНАУ (4) и (5) итерационный процесс не сходится, либо очередному малому приращению ΔP соответствует уменьшение кривизны $\kappa(x)$. В последнем случае такое поведение решения не является физическим и объясняется нелинейностью системы уравнений. Здесь имеет место бифуркация ее решения.

Величина прогиба w определяется из решения уравнения

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\kappa, \quad (6)$$

с соответствующими краевыми условиями. Так, $w(0) = w(l) = 0$, где l — расстояние между опорами, описывают условия закрепления балки, когда один конец шарнирно закреплен, а другой — свободно оперт. Таким образом, в зависимости от количества материалов, из которых состоит балка, наличия в них армирующих элементов для каждого рассматриваемого сечения будет своя отдельная СНАУ.

В п. 3.1.3 приведен алгоритм определения закона деформирования, основанный на решении прямой задачи при фиксированных коэффициентах в полиномиальной зависимости между σ и ϵ (рис. 3). Такой подход был использован при моделировании изгиба “чистого” льда и углепластиков, модифицированных углеродными наночастицами — астраленами, с учетом климатических факторов.



Рис. 3 — Алгоритм определения закона деформирования.

В п. 3.1.4 описан алгоритм численной реализации математической модели, который заключался в моделировании квазистатического процесса нагружения с использованием метода Ньютона для решения (4), (5), hp-КНК для решения (6) с сочетанием распараллеливания и ускорения итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова.

В разделе 3.2 приведены результаты численного моделирования композитных балок: верификации hp-КНК на решении тестовой задачи (п. 3.2.1), углепластиков (п. 3.2.2), “чистого” и армированного льда (п. 3.2.3), железобетона (п. 3.2.4) при сравнении с экспериментальными данными и трехмерным моделированием (рис. 4, 5). При моделировании ледяных композиционных материалов (ЛКМ) в модель был введен параметр, учитывающий степень вклю-

чения арматуры в процесс сопротивления изгибу. Определены его оптимальные значения для удовлетворительного согласования с экспериментальными данными. В процессе проведения численных экспериментов было установлено, что его значения имели слабый разброс и варьировались в пределах от 0.33 до 0.37 для различных ЛКМ.

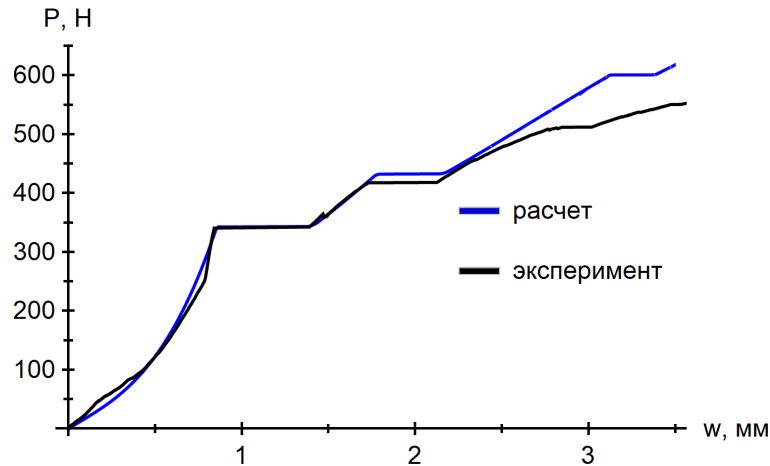


Рис. 4 — Сравнение результатов численного моделирования начального разрушения ледяной балки, армированной арамидными нитями Русар-С, с экспериментом.

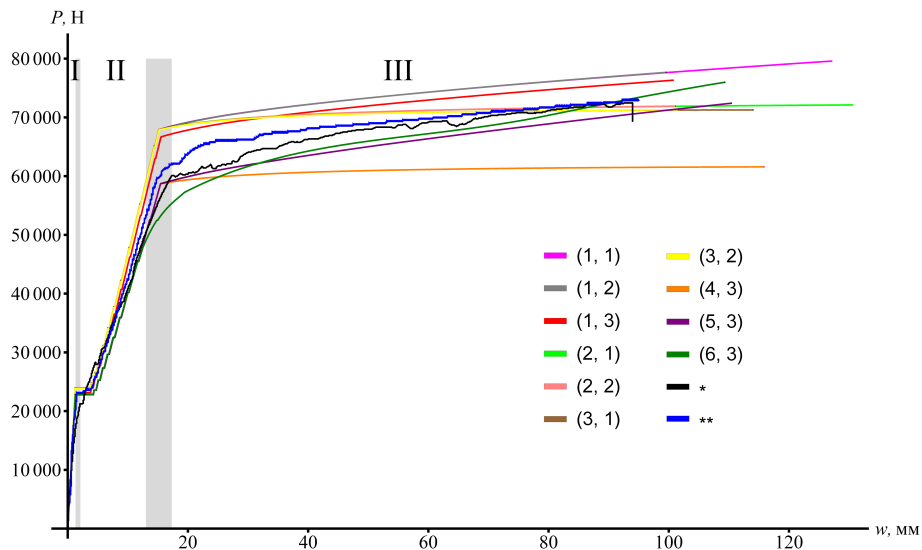


Рис. 5 — Эксперимент (*, Foley и Buckhouse), расчеты в ANSYS (**, Wolanski) и в рамках рассмотренной модели, где в скобках приведены сокращенные обозначения используемых σ – ε диаграмм деформирования арматуры и бетона.

При моделировании железобетона рассматривалось несколько способов аппроксимации законов деформирования: 6 способов для арматуры и 3 для

бетона. Для их построения использовались данные из эксперимента¹³, трехмерного моделирования¹⁴, растяжения стали SA-537 и в случаях нескольких различных модулей упрочнения арматуры E_{r_h} . Для арматуры в случаях 1–3 $E_{r_h} = 2360$ МПа, $E_{r_h} = 236$ МПа и $E_{r_h} = 23.6$ МПа соответственно. Остальные данные взяты из эксперимента. В случае 4 данные взяты из работы Wolanski. В случаях 5 и 6 использованы кусочно-линейная и кусочно-полиномиальная аппроксимации SA 537 соответственно. Для бетона в случае 1 использовались экспериментальные данные по пределу прочности, восходящая ветвь диаграммы деформирования на сжатие строилась по методике из работы Wolanski, нисходящая по СНиП 52-01-2003. В отличие от случая 1 в случаях 2 и 3 восходящая ветвь диаграммы деформирования на сжатие не рассматривалась, при этом в случае 3 использовались данные по пределу прочности из работы Wolanski. Во всех случаях использовался линейный закон при аппроксимации диаграммы деформирования бетона на растяжение и кубический закон — на сжатие. Везде полагалось $E_{c1}^+ = 4733\sqrt{|f_c|}$ МПа, $\sigma_c^+ = 0.62\sqrt{|f_c|}$ МПа — модуль упругости и предел прочности на растяжение соответственно, где f_c — предел прочности на сжатие.

При применении метода КНК показаны высокая скорость решения задачи и удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными и результатами трехмерного моделирования. Исследовано влияние параметров модели на результаты численного моделирования.

Глава 4 посвящена моделированию изгиба тонких пластин. В разделе 4.1 проведен анализ сходимости метода КНК при расчете изгиба пластин простых и сложных форм в рамках теории Кирхгофа-Лява на примере решения различных краевых задач для бигармонического уравнения (3) с известными и неизвестными точными решениями. Рассматривались различные условия закрепления пластины (защемленные, шарнирно закрепленные и свободные края) и способы нагружения (специальная синусоидальная нагрузка и равномерная нагрузка). Проведено сравнение результатов, полученных методом КНК, в случае решения системы уравнений второго порядка и (3) при расчете изгиба шарнирно-закрепленной полигональной пластины. На примере решения урав-

¹³Foley, C.M. Strengthening Existing Reinforced Concrete Beams for Flexure Using Bolted External Structural Steel Channels / C.M. Foley, E.R. Buckhouse. — Marquette University. — P. 80.

¹⁴Wolanski, A.J. Flexural Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element Analysis / A.J. Wolanski. — Marquette University. — P. 87.

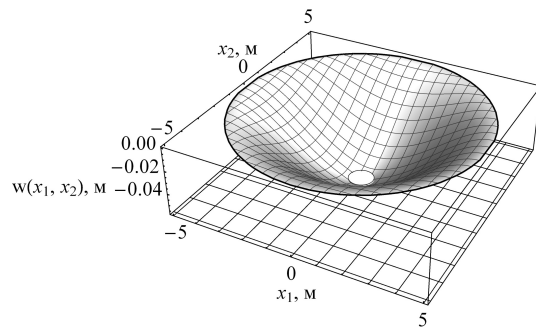
нений бигармонического типа, описывающих изгиб ортотропной пластины и пластины, лежащей на упругом основании, показана возможность достижения высокой точности в расчетах методом КНК.

В разделе. 4.2 рассмотрено моделирование изгиба кольцевой пластины на примере решения краевых задач для (3). Эта задача имеет точное аналитическое решение $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 (\log r - 1) + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \log r + C_4$, где q — поперечная нагрузка, $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — жесткость пластины при изгибе, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины, h — толщина пластины, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — полярный радиус, C_1, \dots, C_4 — неизвестные константы, которые определяются из четырех граничных условий. В табл. 3 приведены результаты численных экспериментов в случае изгиба пластины с заземленным внешним и внутренним контурами при применения h-КНК при $K = 4$ и p-КНК $_h$ с представлением приближенного решения в виде (2). Применение p-КНК $_1$ не позволяет получить адекватного приближенного решения, поскольку оно строится во всем фиктивном прямоугольнике, включающем отверстие. Точное решение данной задачи в центре пластины имеет особенность в виде разрыва второго рода из-за наличия в нем $\log r$. При этом можно достигнуть высокую точность решения, если изменить базис пространства в p-КНК $_1$ с учетом особенности решения. Однако применение h-КНК и p-КНК $_h$ позволяет построить сходящееся кусочно-полиномиальное приближенное решение в задаче с особенностью без ее учета (табл. 3), что в общем случае подтверждает гибкость и универсальность hp-подходов при решении краевых задач для УЧП.

Таблица 3 — Результаты численных экспериментов, $\|E_r\|_\infty$ — относительная погрешность в бесконечной норме, r_1 и r_0 — внешний и внутренний радиусы соответственно

$r_0 = r_1/5$		$r_0 = r_1/50$		$r_0 = r_1/500$		$r_0 = r_1/5000$	
h-КНК, $K = 4$							
$N \times N$	$\ E_r\ _\infty$	$N \times N$	$\ E_r\ _\infty$	$N \times N$	$\ E_r\ _\infty$	$N \times N$	$\ E_r\ _\infty$
8×8	3.60e-1	8×8	1.79e-1	8×8	2.78e-1	8×8	2.92e-1
16×16	6.40e-2	16×16	6.93e-2	16×16	7.60e-2	16×16	9.25e-2
32×32	5.20e-3	32×32	3.96e-2	32×32	1.72e-2	32×32	2.77e-2
64×64	1.23e-3	64×64	7.45e-3	64×64	4.24e-3	64×64	5.22e-3
p-КНК $_h$, $N \times N = 24 \times 24$, $r_0 = r_1/5$							
K	$\ E_r\ _\infty$	K	$\ E_r\ _\infty$	K	$\ E_r\ _\infty$	K	$\ E_r\ _\infty$
4	1.37e-2	6	2.50e-3	8	2.93e-4	10	2.72e-5

На рис. 6 показан прогиб кольцевой пластины в случае со свободным внутренним и заземленным внешним краями при $r_1 = 5$ м, $r_0 = 0.5$ м, $q = 10^5$ Па, $\nu = 0.28$, $E = 200$ ГПа, $h = 0.1$ м. При $K = 10$ (2) на сетке 12×12 значение $\|E_r\|_\infty$ имеет величину порядка $e-3$.



В разделе 4.3 предложен способ решения Рис. 6 — Величина прогиба w бигармонического уравнения путем его инте- кольцевой пластины.

грирования и применения в методе КНК интегральных уравнений коллокации. Метод КНК был верифицирован на решении тестовых задач изгиба изотропных и ортотропных пластин, находящихся под действием нагрузок различного вида с разными условиями закрепления. Консервативный вариант метода КНК зачастую сходился без применения ускорения по Крылову по сравнению с дифференциальным вариантом метода КНК, в котором уравнения коллокации записываются в точках, и при этом нередко требовалось применение этого алгоритма ускорения. Здесь интегральные уравнения коллокации учитывают поведение решения во всей области каждой ячейки в отличие от уравнений коллокации, записанных в точке. На эти обстоятельства особо стоит обращать внимание при решении плохо обусловленных задач, к которым зачастую относятся краевые задачи для уравнений бигармонического типа.

В разделе 4.4 была продемонстрирована возможность решения задачи изгиба ортотропной пластины в рамках FSDT с хорошей точностью при $d/h = 10, 50, 100$, где $d \times d$ — размер пластины, h — ее толщина.

Отметим, что одним из важных достоинств метода КНК является то, что без особых трудностей дифференцированием можно вычислить любые производные полученного приближенного решения, так как это решения является кусочно-полиномиальным. Так, в частности, дифференцированием w определяются компоненты напряжений.

Выводы и практические результаты подготовленной НКР.

- Разработанные новые h-, p- и hp-КНК продемонстрировали высокую точность и порядок сходимости решения различных краевых задач для УЧП, в том числе с особенностями, в канонических и нерегулярных областях. Комбинированное применение метода КНК с алгоритмами ускорения итерационного процесса решения глобальной СЛАУ позволило существенно

сократить время расчетов и количество итераций. Метод КНК зачастую позволяет достичь более высокую точность, чем другие численные методы, а также он является в некоторых случаях более простым в реализации, как с точки зрения построения высокоточных решений, так и применимости к решению различных краевых задач, что подтверждает его гибкость и универсальность.

- Разработанные новая математическая модель изгиба композитных балок и алгоритм ее численной реализации показали свою эффективность. Учет особенностей деформирования, таких как разносопротивляемость материалов растяжению-сжатию, физическая нелинейность и разрушение, обусловленное образованием и распространением поперечных трещин, позволяет провести на персональных компьютерах моделирование изгиба балок вплоть до потери их несущих способностей с относительно небольшими вычислительными затратами. При проведении сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными и трехмерным моделированием на примере углепластиков, “чистого” и армированного льда и железобетона показано удовлетворительное согласование. Исследованы параметры модели и показано их влияние на результаты численного моделирования.
- Показана возможность расчета изгиба пластин простых и сложных форм в рамках различных теорий методом КНК с высокой точностью. Проведен сравнительный анализ полученных результатов в зависимости от используемого варианта метода КНК при решении хорошо и плохо обусловленных задач и задач с особенностями. Установлено, что для решения плохо обусловленных задач (например, бигармоническое уравнение) рекомендуется применять способ построения сетки, описанный в п. 1.1.3. Показаны преимущества hp-подходов при решении задач с особенностями по сравнению с методами, использующими глобальную аппроксимацию.
- Создан комплекс программ для ЭВМ, основанный на новых вариантах метода КНК, позволяющий численно решать различные краевые задачи для УЧП эллиптического типа и проводить численное моделирование изгиба композитных балок и упругих изотропных и ортотропных пластин простых и сложных форм.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Шапеев, В.П. Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // Вычислительные технологии. — 2016. — Т. 21, № 5. — С. 95–110. (РИНЦ)
2. Беляев, В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 629–648. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648. (РИНЦ)
3. Беляев, В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в трапециевидных областях / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2017. — Т. 22, № 4. — С. 22–42. (РИНЦ)
4. Беляев, В.А. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2018. — Т. 23, № 3. — С. 15–30. (РИНЦ)
5. Шапеев, В.П. Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — Т. 19, № 1. — С. 96–111. DOI: 10.26089/NumMet.v19r109. (РИНЦ)
6. Шапеев, В.П. Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — Т. 19, № 4. — С. 340–355. DOI: 10.26089/NumMet.v19r431. (РИНЦ)

7. Шапеев, В.П. Решение эллиптических уравнений в полигональных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.П. Шапеев, Л.С. Брындин, В.А. Беляев // Вестник ЮУрГУ ММП. — 2019. — Т. 12, № 3. — С. 140–152. DOI: 10.14529/mmp190312. (Web of Science, Scopus, РИНЦ)
8. Беляев, В.А. Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов / В.А. Беляев // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 249–263. DOI: 10.15372/SJNM20200302. (РИНЦ)
Belyaev, V.A. Solving a Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method / V.A. Belyaev // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, No. 3. — P. 207–218. DOI: 10.1134/S1995423920030027. (РИНЦ, Web of Science, Scopus)
9. Belyaev, V.A. Modelling and simulation of deformation and failure of reinforced concrete beams under four-point bending / V.A. Belyaev, A.I. Boltaev, L.S. Bryndin, S.K. Golushko, A.G. Gorynin, V.P. Shapeev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics (принята к печати).
10. Shapeev, V.P. Numerical solution with high accuracy of elliptic equations with a coefficients discontinuity / V.P. Shapeev, V.A. Belyaev, L.S. Bryndin // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (принята к печати).

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций, индексируемых в Web of Science и/или Scopus:

11. Belyaev, V.A. Versions of the collocation and least squares method for solving biharmonic equations in non-canonical domains / V.A. Belyaev, V.P. Shapeev // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing, 2017. — Vol. 1893, Art. 030102 (14 p.). DOI: 10.1063/1.5007560.
12. Shapeev, V.P. New possibilities and applications of the least squares collocation method / V.P. Shapeev, V.A. Belyaev, S.K. Golushko, S.V. Idimeshev // EPJ Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Vol. 173, Art. 01012 (8 p.). DOI: 10.1051/epjconf/201817301012.

13. Belyaev, V.A. Solving the biharmonic equation in irregular domains by the least squares collocation method / V.A. Belyaev, V.P. Shapeev // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing, 2018. — Vol. 2027, Art. 030094 (9 p.). DOI: 10.1063/1.5065188.
14. Belyaev, V.A. A h-version of the least squares collocation method for the biharmonic equation in irregular domains / V.A. Belyaev, Bryndin L.S., V.P. Shapeev // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing Ltd, 2019. — Vol. 1214, Art. 012011 (7 p.). DOI: 10.1088/1742-6596/1214/1/012011.
15. Shapeev, V.P. The least squares collocation method for the biharmonic equation in irregular and multiply-connected domains / V.P. Shapeev, S.K. Golushko, L.S. Bryndin, V.A. Belyaev // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing Ltd, 2019. — Vol. 1268, Art. 012076 (7 p.). DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012076.
16. Belyaev, V.A. The least squares collocation method for biharmonic-type equations in the plate theory / V.A. Belyaev, Bryndin L.S., V.P. Shapeev // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing, 2019. — Vol. 2125, Art. 030061 (7 p.). DOI: 10.1063/1.5117443.
17. Buznik, V.M. Determining the law of ice deformation / V.M. Buznik, S.K. Golushko, E.V. Amelina, V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, A.G. Gorynin, V.P. Shapeev // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing Ltd, 2019. — Vol. 1404, Art. 012010 (6 p.). DOI: 10.1088/1742-6596/1404/1/012010.
18. Belyaev, V.A. The least squares collocation method with the integral form of collocation equations for bending analysis of isotropic and orthotropic thin plates / V.A. Belyaev, Bryndin L.S., V.P. Shapeev, S.K. Golushko // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing, 2020. — Vol. 2288, Art. 030084 (6 p.). DOI: 10.1063/5.0028298.
19. Golushko, S.K. The least-squares collocation method in the mechanics of deformable solids / S.K. Golushko, V.P. Shapeev, V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, A.I. Boltaev, A.G. Gorynin // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing Ltd, 2021. — Vol. 1715, Art. 012029 (10 p.). DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012029.

20. Shapeev, V.P. New versions of the least-squares collocation method for solving differential and integral equations / V.P. Shapeev, S.K. Golushko, V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, P.I. Kirillov // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing Ltd, 2021. — Vol. 1715, Art. 012031 (8 p.). DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012031.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

21. Программа решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными в нерегулярных областях hp-вариантом метода коллокации и наименьших квадратов: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020663386 / В.А. Беляев, Л.С. Брындин, В.П. Шапеев; зарег. 27.10.2020.
22. Программа решения дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020663387 / В.А. Беляев; зарег. 27.10.2020.